

# Optimización de láminas reticuladas de una capa

## *Optimization of one layer lattice shells*

B. Orta\*

### RESUMEN

Este artículo muestra la reflexión sobre el diseño óptimo de láminas reticuladas de una sola capa en la cobertura de espacios de gran luz con diferentes bases. El objetivo es encontrar los parámetros que más efecto tienen en el coste de acuerdo con la Teoría de Diseño de Estructuras (3,4), de manera comparable a estructuras planas (4,12). Para alcanzar este propósito se ha creado un programa (8) que utiliza el Recocido Simulado (SA), una técnica de aproximación numérica que encuentra soluciones cercanas al óptimo. La función objetivo utilizada se extrae de la Teoría de Diseño de Estructuras: volumen estructural, se verán su definición y características.

Se muestran diversas soluciones a los ejemplos numéricos propuestos; estas soluciones resuelven problemas similares cambiando la forma de la planta a cubrir. Para terminar se muestran los parámetros de forma obtenidos a partir del análisis de las soluciones, y se extraen conclusiones como que el SA es un método apropiado para esta clase de problemas.

445-22

**Palabras clave:** Optimización, Diseño Estructural, Láminas Reticuladas.

### 1. INTRODUCCIÓN

Una lámina es una estructura que salva una gran luz con pequeños espesores; esto es posible, fundamentalmente, gracias a su forma. Este es uno de los aspectos principales en el diseño de láminas. En este artículo se utilizarán láminas reticuladas, resueltas a base de barras en una capa; se buscará la forma para que disminuya el coste, desde el punto de vista de la cantidad de material empleado, dejando de lado aspectos como la mano de obra, la complejidad de ejecución, o aspec-

### SUMMARY

*This article presents the reflection on optimum design in one layer lattice shells to cover large span spaces with different base geometries. The objective is to find parameters of form that have more effect on cost, in agreement with the Theory of Design of Structures (3,4), comparable to plane structures (4,12). To reach this aim, a program (8) has been created using Simulated Annealing (SA), a numerical approximation algorithm that finds solutions near optimum. The objective function used is extracted from the Theory of Design of Structures: structural volume. Its definition and characteristics will be seen.*

*Diverse solutions to the numerical proposed examples are shown. These solutions solve similar problems changing the form of the plant to be covered. To finish, parameters of form from found solutions are displayed, and conclusions are extracted, such that SA is an appropriated method for this kind of problems.*

**Keywords:** Optimization, Structural Design, Lattice Shells.

tos energéticos. El coste relacionado con el consumo de material se aproxima bastante al problema de recursos sostenibles. Se harán diversas simplificaciones que se irán exponiendo.

### 2. ESTADO DE LA CUESTIÓN

Los métodos de búsqueda de formas en láminas tradicionales utilizan modelos físicos: se carga una membrana flexible, habitualmente con el peso propio, obteniéndose un estado de equilibrio con esfuerzos de tracción. Al

\* Departamento de Estructuras de Edificación, E.T.S. de Arquitectura. UPM. Madrid, España

1.- Telas colgadas, experimento de Isler (10).



rigidizar el modelo e invertirlo se obtiene una cáscara a compresión para el mismo caso de cargas; aparecen así formas muy ligeras.

Este proceso de inversión está enfocado a la construcción con materiales que no pueden resistir tracciones como lo es el hormigón (Figura 1).

Recientemente se están utilizando métodos analíticos; éstos necesitan información de las derivadas de la función objetivo y de las restricciones del problema. Anzola (2) optimiza simultáneamente la forma de la lámina y la distribución del material por medio del análisis de sensibilidad. Necesita conocer las derivadas de la función objetivo y de las restricciones, para cada variable de diseño y en cada iteración (Figura 2).

Ramm (10) utiliza técnicas de elementos finitos que necesitan el uso secuencial del análisis estructural combinado con algoritmos de sensibilidad. El cálculo de las sensibilidades de los desplazamientos, esfuerzos, restricciones de la frecuencia natural, respecto a las variables de diseño, necesita del uso de derivadas y gradientes difíciles de obtener ya sea analítica o numéricamente (Figura 3).

En este artículo se aplica el SA, un algoritmo de optimización que ha dado buenos resultados en numerosos problemas, incluida la optimización de estructuras. Con este método las formas obtenidas son nuevas y sorprendentes.

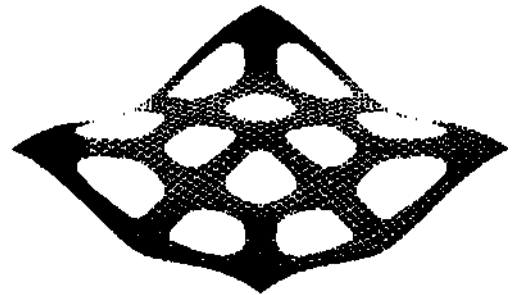
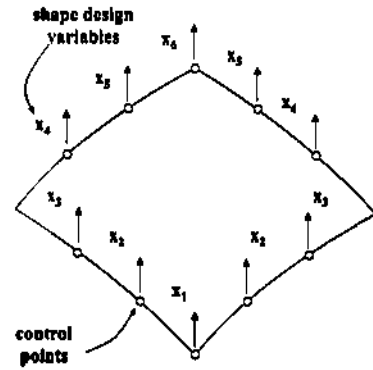
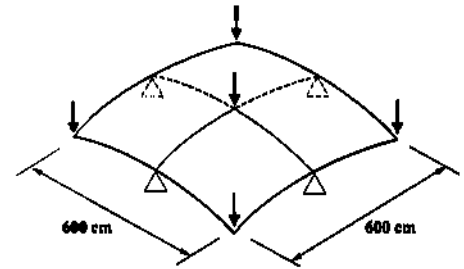
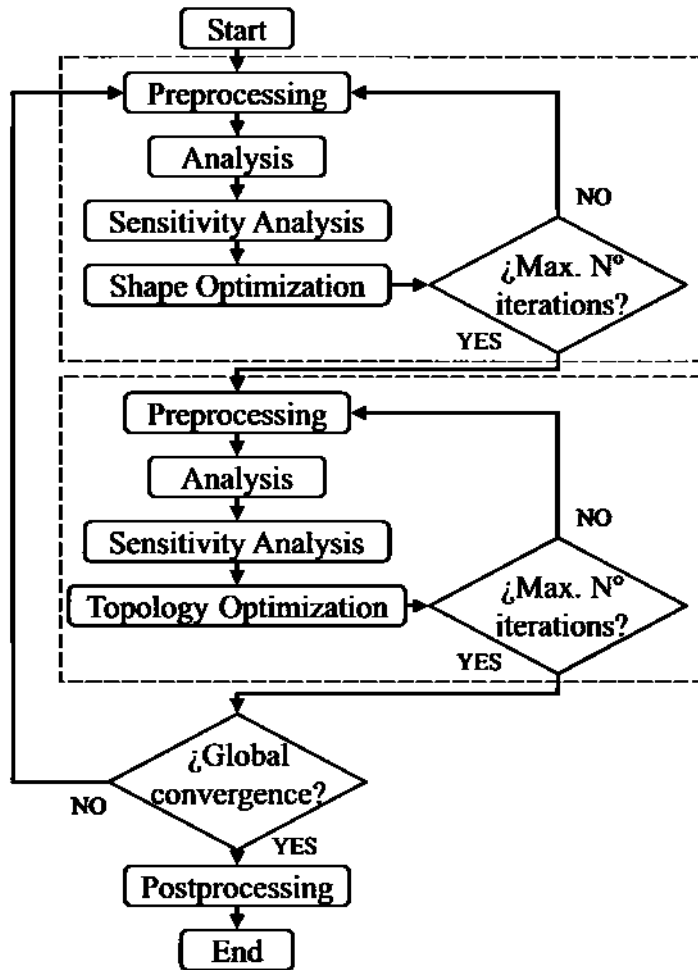
La lámina se asimila a una superficie reticulada; existen investigaciones similares en la optimización de celosías. Hansaçebi (5)

aplica el SA a la optimización simultánea del diseño de entramados, su dimensionado y topología, pero no hace una búsqueda geométrica. El objetivo es minimizar el peso de la estructura bajo un conjunto de coacciones impuestas. En este caso la configuración inicial determina la solución (Figura 4, pág. 62).

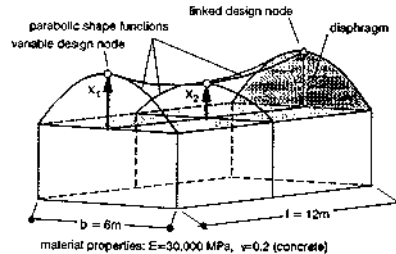
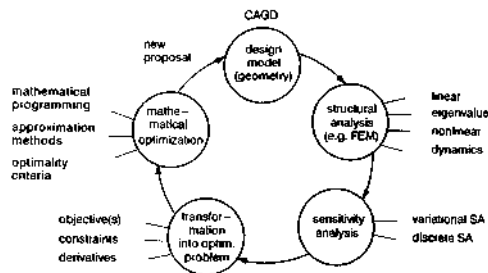
### 3. RECOCIDO SIMULADO (SA)

Para realizar la búsqueda de soluciones, se ha creado un programa que usa el SA. Es un algoritmo de aproximación estocástica hacia la solución óptima. No utiliza las derivadas de la función objetivo, sólo evalúa la función a optimizar. SA recibe su nombre por ser una analogía con sistemas termodinámicos como la cristalización de una sustancia disuelta en agua, o la solidificación de un metal (recocido). Este proceso comienza con una temperatura alta que permite que todas las moléculas de la mezcla se puedan mover libremente unas respecto a otras. Cuando la mezcla se enfría lentamente, su movilidad se pierde gradualmente. Si el proceso es lo suficientemente lento las partículas se colocan ordenadamente y se acercan a un estado de energía mínima. En algunos casos estos estados se pueden reconocer por su perfección visual, este es el caso de la forma de un cristal puro en el que las partículas están perfectamente ordenadas. El recocido simula la mejora global basado en iteraciones con cambios locales que tienen efectos en partículas próximas.

En el caso de la optimización la temperatura es una energía de referencia, o parámetro de control ( $c_k$  en la Figura 5, pág. 63) que

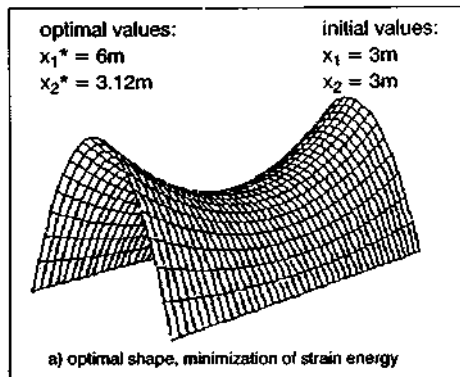
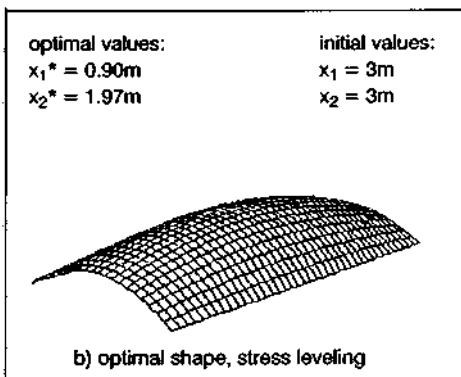


2



2- Anso: Flujo de Programa y solución de un problema (2).

3- Raam: Flujo de Programa y solución (10).



3

determina la fluctuación permitida de la configuración estudiada.

Con este método a partir de una solución inicial se genera aleatoriamente una alternativa

produciendo un cambio en una de las variables. Para elegir entre una configuración y su alternativa se aplica el criterio de Metrópolis [1]. Éste es un criterio de aceptación probabilístico: si el cambio es a mejor siempre se

acepta, pero si es a peor sólo se acepta a veces. Al principio del proceso, virtualmente, se aceptan todas las transiciones (temperaturas altas) mientras que al final los cambios a peor tienen una posibilidad baja de ser aceptados. El proceso termina cuando cualquier cambio produce un diseño de probabilidad cero de ser aceptado.

$$\begin{aligned} \text{si } f(x_j) < f(x_i) \quad x_j \text{ se acepta} & \quad [1] \\ \text{si } f(x_j) > f(x_i) \quad x_j \text{ se acepta con una probabilidad de: } & \exp((f(x_i) - f(x_j)) / c_k) \end{aligned}$$

donde:

$x_i$  = configuración actual.

$x_j$  = configuración alternativa.

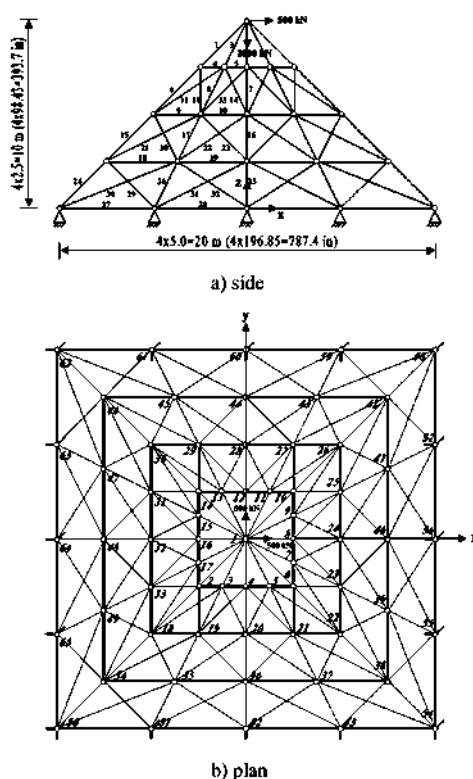
$f(x_i), f(x_j)$  = valor de la función en los estados  $i$  y  $j$  respectivamente.

$c_k$  = parametro de control.

La característica de aceptar soluciones peores significa que el recocido simulado puede escapar de los mínimos locales.

Con valores altos del parámetro de control al principio, se puede garantizar que la búsqueda alcance configuraciones distantes a la inicial.

4- Hansaçebi: Estructuras inicial y final (5).



Esto permite alcanzar áreas de la función objetivo con mejor comportamiento general.

Además, en muchos casos, cuando la obtención del óptimo puede ser lento, SA

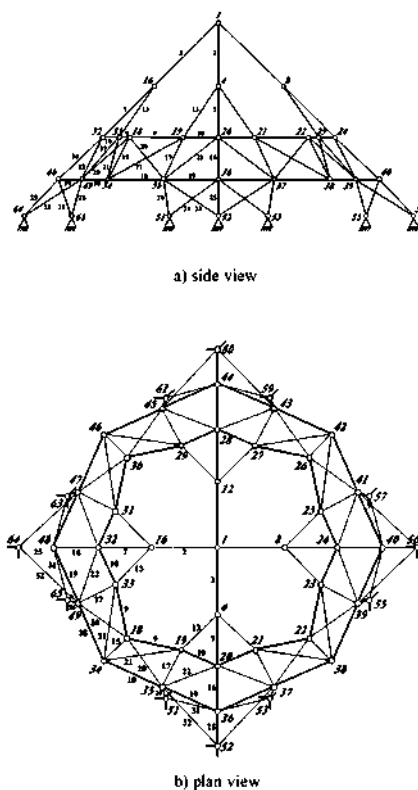
consigue una buena aproximación en un tiempo de computación razonable.

Kirkpatrick (6) utiliza por primera vez el SA en la optimización de circuitos integrados. Hoy en día se usa en muchos campos de estudio; en muchos y difíciles problemas combinatorios con buenos resultados. Se puede consultar la demostración de su convergencia (13), y su programación (9) en la bibliografía.

#### 4. FUNCIÓN OBJETIVO

La función objetivo es el volumen estructural ( $V_s$ ); en barras se define como la integral extendida a toda la estructura, del producto del valor absoluto del esfuerzo axial,  $N$ , en la sección por el elemento longitudinal,  $ds$ , de la pieza en el punto considerado. Mide simultáneamente fuerzas y sus trayectorias, sus dimensiones son las del trabajo; de ahí que también se denomine trabajo estructural. Aquí se muestra su expresión de manera continua y discreta [2].

$$V_s = N \cdot \int ds \quad V_s = \sum_{i=1}^e N_i L_i \quad [2]$$



```

procedure SIMULATED _ANNEALING;
begin
  INICIALIZA ( $x_i, c_i, M_i$ );
   $C := 0$ ;
   $x := x_i$ ;
  repeat
    for  $v := 1$  to  $M$  do
      begin
        GENERATE_ALTERNATIVE ( $x_i$  from  $x_i$ );
        if  $f(x_i) \leq f(x)$  then  $x := x_i$ 
        else
          if  $\exp((f(x) - f(x_i)) / c_i) > \text{random}[0,1]$  then  $x := x_i$ 
        end;
         $C := C + 1$ ;
        CALCULATE_TRANSITIONS ( $M_i$ );
        CALCULATE_CONTROL ( $c_i$ );
      until stop_criterion
    end;

```

5

pías del material y considera sólo aspectos de geometría, topología y cargas aplicadas. Por esta razón Vs aporta consideraciones de forma al margen del material. Suele ser habitual el empleo de un único material en una estructura; en este caso la relación del volumen de material ( $V_m$ ) o del peso ( $P$ ) con el volumen estructural es la siguiente:

$$\frac{N}{e} = \frac{M}{e} \quad ; \quad \frac{e}{N} = \frac{e}{M}$$

Donde:

- $f$ : tensión del material (simétrica en tracción y compresión o un valor promedio)  
 $A_i$ : área de la sección transversal del elemento  $i$   
 $r_i$ : peso específico del material del elemento  $i$ , si es igual en toda la estructura:  $r$ .

En el caso de estructura de barras y dimensionado estricto:

$$V = \frac{V_s}{m} \quad ; \quad \frac{P}{f} = \frac{P}{f} V_s \quad [5]$$

## 5. OPTIMIZACIÓN DE LÁMINAS: BASES

El propósito es encontrar la configuración de geometría y topología que hacen el volumen estructural de la lámina, resuelta como un reticulado de barras, tan pequeño como sea posible. El objeto de diseño consiste en una superficie triangulada por barras (lámina reticulada), de una capa. Su forma se define por su geometría  $g$  y su topología  $t$ .

La geometría se determina por  $g(n) = \{(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)\}$ , que representa las coordenadas en el espacio de los  $n$  nudos y varía dentro de  $G$ , todas las posibles coordenadas en una región previamente definida ( $g \in G$ ).

La topología de la estructura define qué nudos se unen a otros nudos por medio de barras; se puede expresar como el conjunto de barras que unen dos nudos  $t(e) = \{(N_{1i}, N_{1j}), \dots, (N_{ni}, N_{nj})\}$ ; donde  $e$  es el número de barras. Topología varía dentro de todas las posibles topologías ( $t \in T$ ).

Sólo se consideran las láminas reticuladas internamente isostáticas. La sustentación no será redundante salvo en aquellos casos en que sea necesario para garantizar condiciones simétricas y así no forzar tendencias; además se dispondrán de manera que no contribuyan en el reparto del trabajo, esto podría suponer diferencias en como las fuerzas se materializan en cimentación (por ejemplo en anillos) que pueden producir condiciones no comparables entre formas que compiten entre sí.

El conjunto de coacciones se define de la siguiente manera:

$$v = \{(n_i, 8), (n_i, 8_y), (n_i, 8_z), \dots, (n_j, 8_x), (n_j, 8_y), (n_j, 8_z)\}$$

donde cada pareja consiste en el número de nodo en el que la coacción está aplicada y la dirección de la coacción. En este conjunto aparecen todos los nudos  $n_i$  y  $n_j$ , al menos una vez, ( $n > n_j$ ).

La carga se define por unidad de superficie en dirección vertical, eje  $Z$ , y se distribuye a todos los nudos de manera puntual  $q(i)$  proporcionalmente a su área de influencia.

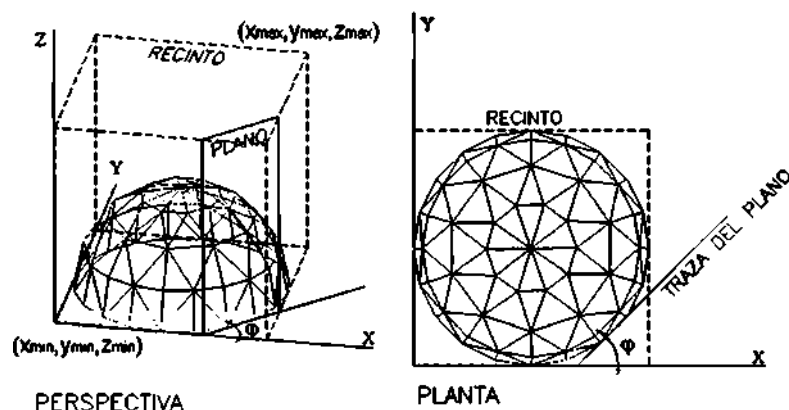
El análisis se hace por el método de elementos finitos con elementos tipo barra de tres grados de libertad por nodo (desplazamientos en los tres ejes de coordenadas).

Debido al empleo del volumen estructural como función objetivo, no es necesario hacer el dimensionado de las secciones de manera explícita; ya está implícito un dimensionado estricto. En el análisis de las estructuras hiperestáticas se consideran, de partida, áreas iguales en todas las barras, el dimensionado definitivo sería el estricto a partir del análisis.

### 5.1. Formulación general del problema de diseño

Los grados de libertad de una configuración se puede expresar como  $x$ , con  $x = \{g, t\} \in \{G, T\}$ , donde  $G$  y  $T$  son los conjuntos de posibles

5.- Programación del SA en pseudo lenguaje (1).



6- Recinto.

variables geométricas y topológicas respectivamente. Cada conjunto  $\mathbf{x}$ , corresponde con una solución que para ser válida debe estar contenida en el dominio de búsqueda,  $\mathbf{X}$ .

En consecuencia, el problema de optimización se puede expresar de acuerdo con [6]. Esto es, encontrar la configuración de geometría y topología que hacen mínima la función objetivo, dentro del dominio de búsqueda.

Encontrar  $\mathbf{x}_0$ , tal que:

$$f(\mathbf{x}_0) = \min(f(\mathbf{x})) \quad [6]$$

## 5.2. Dominio de búsqueda

El espacio de búsqueda,  $\mathbf{X}$ , está constituido por todas las láminas reticuladas con  $n$  nudos (constante), las coacciones determinadas, y cumple los siguientes requisitos:

- Estructurales: son los tres básicos, resistencia, rigidez y estabilidad general. Sin embargo no se ha considerado el pandeo local de la barra ni de la lámina, esto hace que las soluciones sólo sean válidas desde un punto de vista teórico.

- Geométricos y topológicos son los siguientes:

- 1- Se impone que el número total de nudos,  $n$ , y el número de barras,  $e$ , permanezca constante a lo largo de todo el proceso; de esta manera se evita que el SA llegue a la solución óptima a base de eliminar nudos cargados en posiciones distantes a los apoyos.

- 2- Los nudos pueden cambiar su posición a cualquier punto dentro de un recinto definido por dos puntos que marcan los límites inferior y superior  $\{(x_{\min}, y_{\min}, z_{\min}), (x_{\max}, y_{\max}, z_{\max})\}$  (Figura 6).

- 3- Cada nudo de contorno libre puede cambiar su posición dentro de un plano paralelo al eje  $Z$  que contiene al nudo. El plano se define por el ángulo  $\phi$  y por la coordenada del nudo.

- 4- Se limita la longitud máxima de las barras para evitar que se ignore el problema de flexión, moviendo los nudos cargados cerca de los apoyos

- 5- Las barras siempre intersecan en nudos y su proyecciones en horizontal no son coincidentes en ningún punto; de esta manera se evitan soluciones de doble capa.

## 5.3. Generación de láminas

Con el generador de alternativas y con un número finito de jugadas, se pretende asegurar que exista una probabilidad no nula de que una lámina se pueda transformar en cualquier otra y siga cumpliendo las condiciones del problema. Cada transformación produce una pequeña variación.

Se ha diseñado un mecanismo específico de generación para categoría de variables (Figura 7): las geométricas (1- cambio de posición de un nudo) y las topológicas (2- cambio de una barra por otra). Estas dos jugadas tienen un grado similar de libertad, por ésta razón ambas tienen la misma probabilidad de ser escogidas.

## 6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se usa una serie de ejemplos que resuelven problemas simples, con una geometría básica: base circular o cuadrada. Se salva una luz de 100 m y la carga es de  $4,5 \text{ kN/m}^2$ , común en todos los casos. El recinto se limita a las cotas  $z \geq 0$  (siendo  $z=0$  la cota de los apoyos), de esta manera se eliminan las soluciones de membrana colgada trabajando fundamentalmente a tracción. La longitud máxima de las barras es el 30% de la luz (30 m).

Después del proceso de análisis el programa aporta soluciones en archivos de entrada el programa ANSYS-ED 5.3 (de análisis de estructuras que usa el método de los elementos finitos). De esta manera se confirma el resultado del análisis y se obtienen las imágenes que se muestran a continuación donde se puede observar la manera de trabajar de la estructura. En paralelo aparece una imagen de AutoCAD con luces y sombras. Cada conjunto se rotula con el volumen estructural en  $\text{kN}\cdot\text{m}$  que no depende del material utilizado, solo depende del axil de las barras y sus longitudes.

La forma de la estructura inicial no es importante si al principio del proceso la temperatura toma valores altos; así se producen grandes cambios al principio que habitualmente se aceptarán; aun así se muestra la configuración inicial.

El volumen estructural se descompone en las partes (Tabla 1) correspondientes al trabajo en tracción  $V_s^+$ , y a compresión  $V_s^-$ , o según la dirección de transmisión de la carga: horizontal  $V_s^=$ , y vertical  $V_s^||$ , con el fin de verificar su cercanía al óptimo.

Se puede verificar la cercanía de una solución al óptimo en función del teorema de Michell (7). Se puede demostrar que en un diseño óptimo el trabajo vertical es igual al horizontal ( $V_s^= = V_s^||$ ). El trabajo a compresión y tracción también son iguales, sin embargo en los diseños de recinto positivo sólo sucede con la componente horizontal ( $V_s^= = V_s^{+-}$ ), debido a que el traslado de carga en vertical es mayor ( $V_s^- > V_s^+$ ). Son condiciones necesarias pero no suficientes.

#### 6.1. Base circular

La configuración inicial (Figura 8, pág. 66) tiene 101 nodos, 280 barras y 23 bielas de sustentación 20 verticales en todos nodos de la base (apoyo continuo) y 3 horizontales tangentes a la circunferencia.

La solución tiene forma de cúpula parabólica con barras trabajando fundamentalmente a compresión, sin anillos intermedios y un anillo en la base a tracción (Figura 9, pág. 66). Aparecen plegaduras radiales en la superficie que ayudan a resistir las flexiones locales.

En la Tabla 2 se puede ver que cumple con los requisitos de un diseño óptimo  $V_s^= = V_s^||$ , y  $V_s^{+-} = V_s^-$ . La disposición de los apoyos horizontales es tal que son nulas y no intervienen en el reparto del trabajo ( $V_s^{+-} - V_s^- = 0$ ).

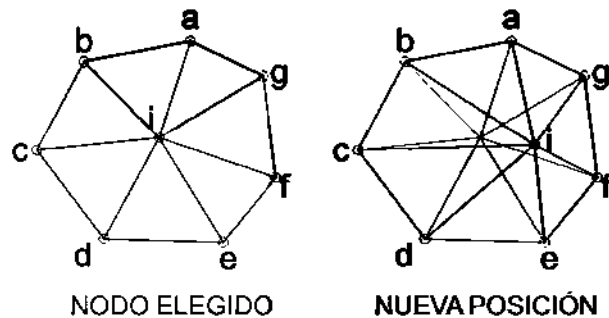
#### 2.2. Base cuadrada, apoyo continuo

Para este ejemplo se ha tomado como referencia el aeropuerto en Stansted, Londres, Norman Foster, (Figura 10, pág. 69).

El modelo es una simplificación del un módulo de la cubierta; no se pretende

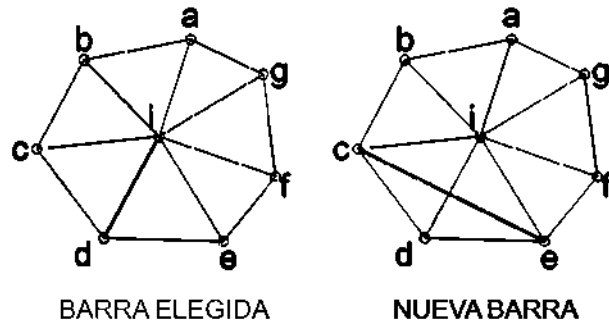
## GEOMETRÍA

### 1.-Cambio de posición de un nodo:



## TOPOLOGÍA

### 2.-Sustitución de barra:



copiar dimensiones, cargas, tipo de apoyo o comportamiento estructural, de hecho en la estructura original algunas barras trabajan a flexión.

Se escala el módulo para igualar la luz de 100 m del resto de ejemplos (Figura 11, pág. 67). Se disponen apoyos en los 24 nodos del contorno en vertical más 4 horizontales en los vértices de la base (Figura 12, pág. 67).

Tiene 228 barras y 85 nodos. El conjunto es una estructura hiperestática con redundancia igual a 1.

La solución es una cúpula de barras a compresión (Figura 13) y los empujes se resuelven en un anillo en la base. En la intersección entre la forma circular del anillo y la cuadrada de la base aparece una forma casi plana.

De nuevo aparecen algunas plegaduras radiales que dan mayor rigidez a la superficie.

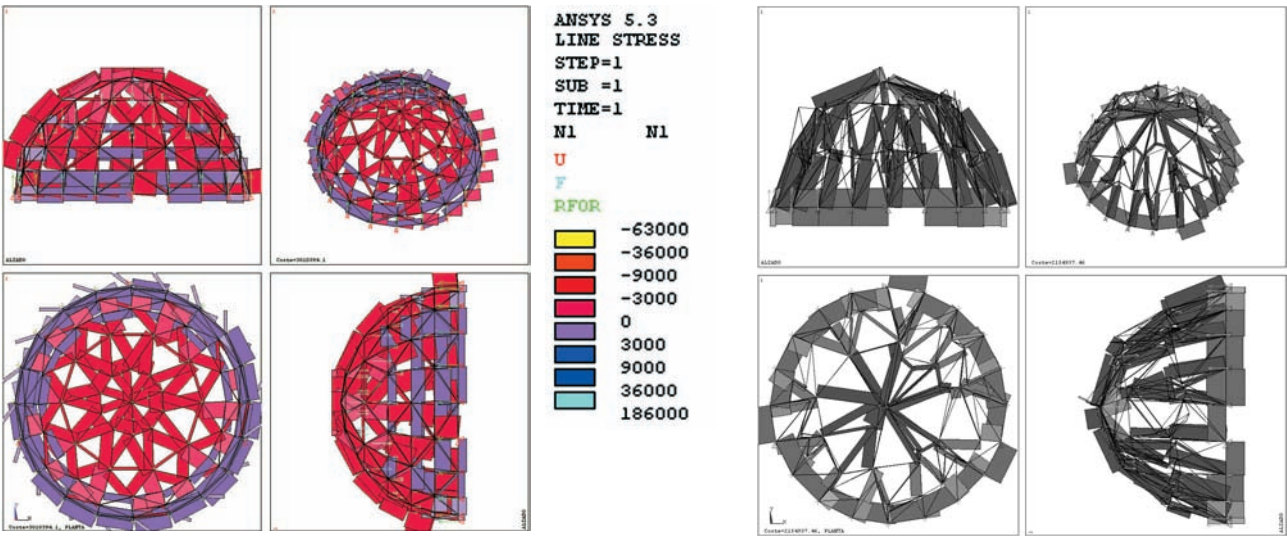
7- Jugadas del generador de alternativas.

Tabla 1  
Modelo de volumen estructural descompuesto

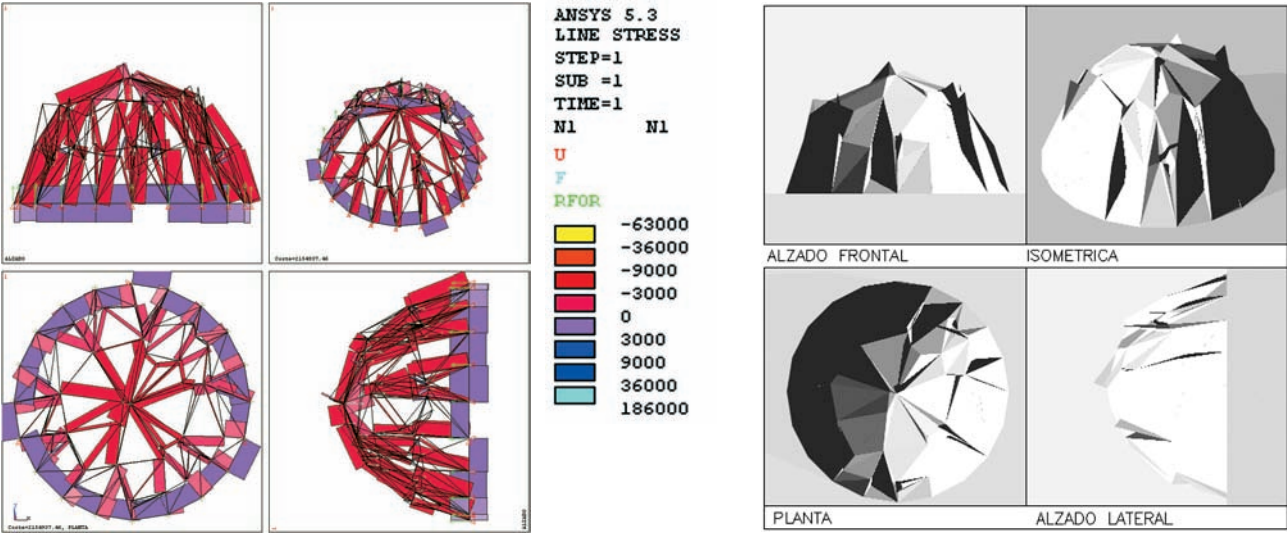
	$V_s^-$	$V_s^+$	
$V_s^+$	$V_s^{+=}$	$V_s^{+n}$	$E V_s^+$
$V_s^-$	$V_s^{=-}$	$V_s^{-n}$	$E V_s^-$
	$ZV_s^=$	$E V_s^=$	$V_s$

Tabla 2  
Volumen estructural desglosado

ce	$V_s^=$	$V_s^+$	
$V_s^+$	579707	10265	589972
$V_s^-$	579707	985256	1564963
	1159414	995521	2154935



8



9

8- Configuración inicial,  $V_s = 3,010$ ,  $e06 \text{ kN.m}$ .

9- Solución,  $V_s = 2,155$ ,  $e06 \text{ kN.m}$ .

10- Aeropuerto de Stansted, Londres, de Norman Foster.

11- Configuración inicial,  $V_s = 148,439$ ,  $e06 \text{ kN.m}$ .

12- Disposición de las bielas horizontales.

13- Solución,  $V_s = 2,934$ ,  $e06 \text{ kN.m}$ .

En la Tabla 3 se observa que la solución cumple con los requisitos de un diseño óptimo  $V_s^+ \approx V_s^{\text{II}}$ , y  $V_s^{+-} = V_s^-$ .

También se deduce que a pesar de ser una estructura hiperestática, la disposición de los apoyos horizontales es acertada, sus reacciones son nulas y no intervienen en el reparto del trabajo, exactamente  $V_s^{+-} - V_s^- = 0$ .

### 6.3. Base cuadrada, apoyo en los vértices y borde libre

En este caso se utiliza una estructura de Isler como modelo inicial, (Figura 14, pág. 68). Se crea un modelo de barras articuladas (Figura 15, pág. 69) escalado del inicial para igualar la luz en todos los ejemplos cubriendo un área de  $100 \times 100 \text{ m}$ .

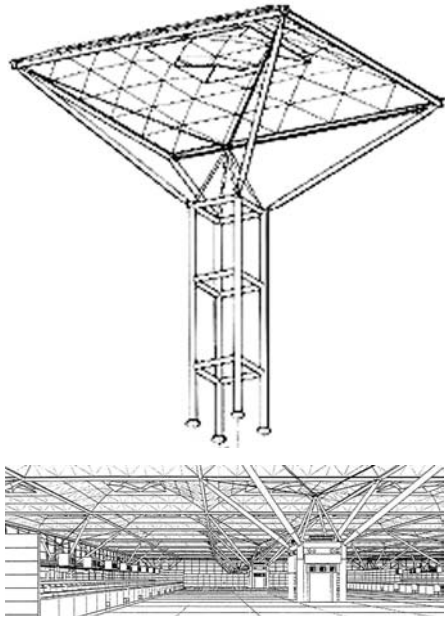
No hay muchas posibilidades para ubicar los apoyos, cuatro nodos en cada esquina se coaccionan en los tres ejes lo que da 48 bielas de sustentación. La estructura tiene 113 nodos y 292 elementos por lo que la configuración es hiperestática por sustentación con redundancia igual a 1.

Se observa un trabajo uniforme en toda la superficie y una alta concentración de tensiones cerca de los apoyos.

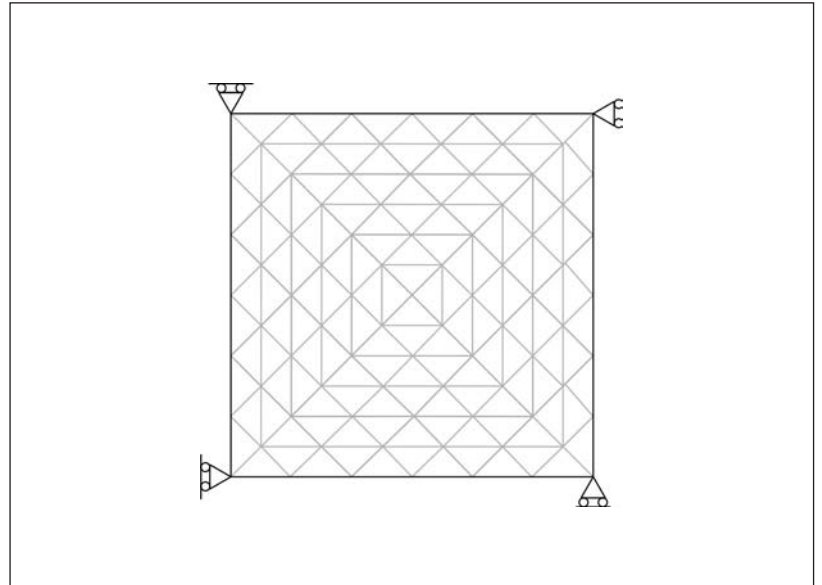
Tabla 3  
Volumen estructural desglosado

SBCS	$V_s^+$	$V_s^{\text{II}}$	
$V_s^+$	958549	73869	1032418
$V_s^-$	958549	943315	1901864
	1917098	1017184	2934283



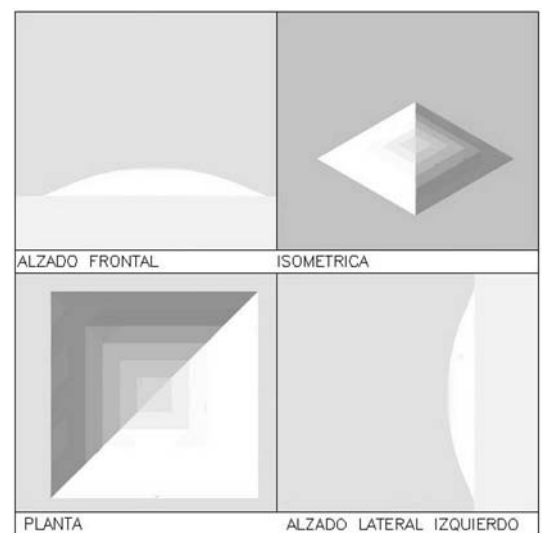
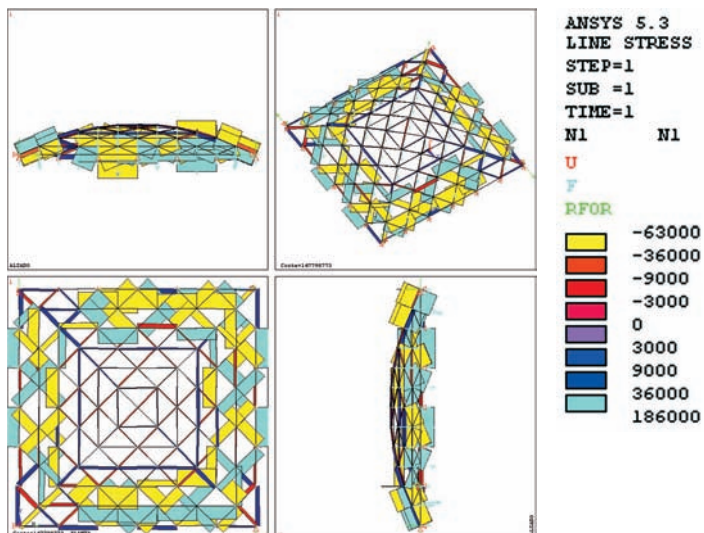


10

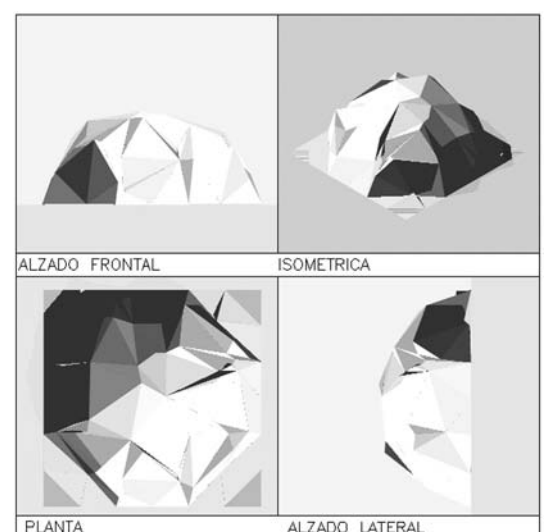
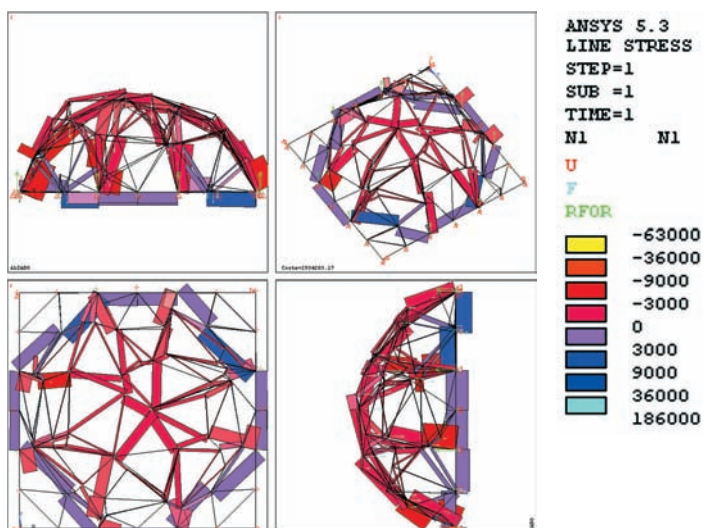


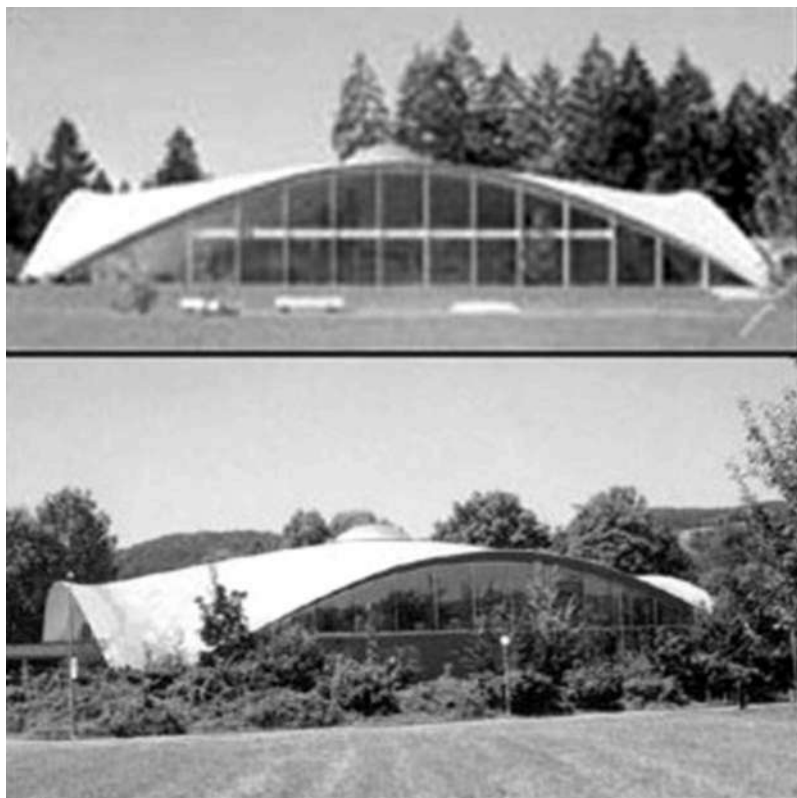
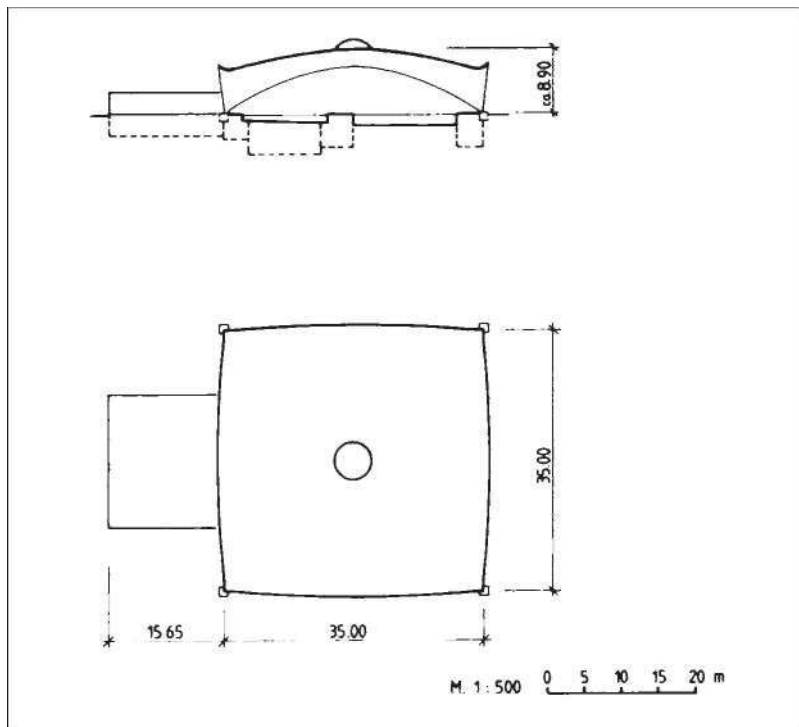
12

11



13





14- Piscina en Brugg (Suiza), de Heinz Isler (11).

Para comparar esta solución con las anteriores es necesario incluir el esfuerzo horizontal que se llevan los apoyos, para este fin se suponen unas barras, uniendo los vértices de la base que se llevan esta componente, esto supone un trabajo de  $5,790 \text{ e}06 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .

La Tabla 4 incluye este valor como un incremento del trabajo horizontal a tracción. Esto podría materializarse como un anillo o cruces en la base.

Se observa (Tabla 4) que  $(V_s^{+} - V_s^{-})$  y que  $(V_s^{-} < V_s^{II})$  debido a que es un diseño en recinto positivo, mientras que  $V_s^{+II} - V_s^{II}$ .

Se puede afirmar que la configuración inicial tiene características de un diseño óptimo.

La solución obtenida tiene una alta rugosidad de la superficie con múltiples plegaduras. Estas plegaduras proporcionan mayor rigidez a la superficie ante las flexiones locales y ayuda a reducir el volumen estructural. Por otra parte la configuración inicial tiene características de óptimo para una distribución de tensión uniforme, mientras que la nueva concentra las tensiones en unos pocos elementos una serie de arcos entrelazados, con una topología claramente diferente (Figura 16).

En el alzado lateral se observa una plegadura muy pronunciada en el borde que hace que no sea necesaria una viga de borde.

Observando los valores de la Tabla 5 se aprecia, al igual que en otros casos, que se trata de un diseño de recinto positivo por lo que es mayor el trabajo a compresión que el de tracción.

## 7. RESUMEN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

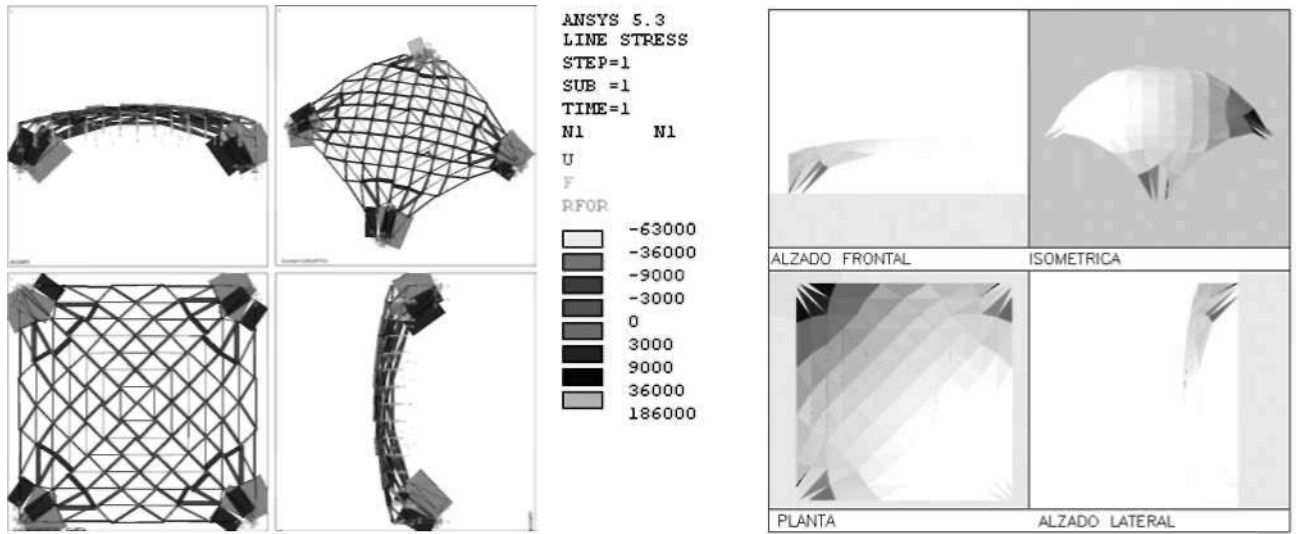
En la Tabla 6 se comparan todos los resultados obtenidos. Se puede ver, en todos los casos, que el volumen estructural disminuye considerablemente respecto a la solución inicial. Se indican los valores del volumen estructural ( $V_s$ ) y de la esbeltez ( $l/h$ ) de la solución encontrada.

Para comparar valores de volumen estructural se crea una magnitud adimensional, volumen estructural reducido,  $w$ , [6], a partir de dividir el volumen estructural entre la carga por unidad de superficie,  $q$ , el área cubierta,  $A$ , y la luz más corta salvada,  $l$ .

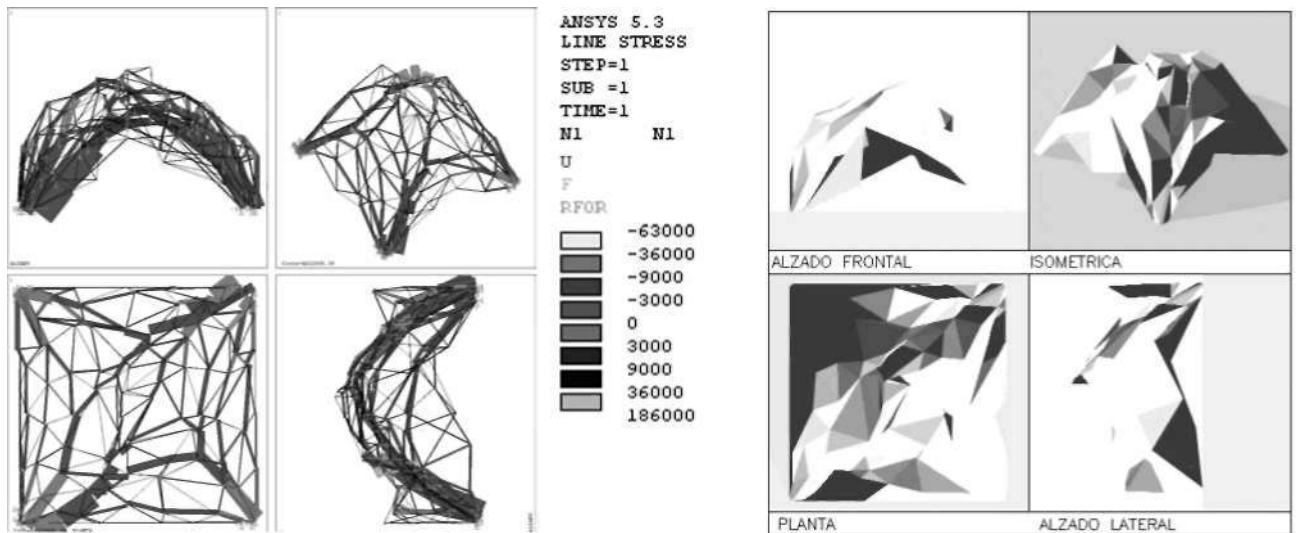
$$w = V_s / (q \cdot A \cdot l)$$

[6]

De esta manera se observa que el volumen estructural reducido es muy similar en los casos de base circular y base cuadrada con apoyos continuos. Mientras la solución de base cuadrada con apoyos en los vértices y borde libre el volumen estructural reducido es mucho mayor, es lógico dado que los



15



16

**Tabla 4**  
Desglose del volumen estructural de la confi guración inicial

	Vs=	Vs*	
Vs+	9168656	2056652	11225308
Vs-	9886668	2917773	12804443
	13665307	4974426	24029749

**Tabla 5**  
Volumen estructural desglosado, incluye el trabajo de los apoyos horizontales

	Vs=	VsII	
Vs+	2534221	83845	2618066
Vs-	2412799	1593116	4005915
	4947020	1676961	6623981

**Tabla 6**  
Resumen de resultados

	Vs inicial /1e6 [kN m]	Vs/1e6 [kN m]	cf A* / [kN m]	w	X=I/h
CIRCULAR	3.010	2.155	4.5*7853*100	0.61	1.69
CUADRADA AP. CONTINUOS	148.439	2.934	4.5*10000*100	0.65	2.36
CUADRADA AP. VÉRTICES	24.030	6.623	4.5*10000*100	1.47	1.66
CUADRADA AP. VÉRTICES INSCRITO EN UN CÍRCULO			4.5*15708*141.42	0.66	

15 - Confi guración inicial, Vs = 18,640, e06 kN.m, incluyendo el trabajo que se llevan los apoyos horizontales. Vs = 24,030 e06 kN.m.

16 - Solución, Vs = 4,223, e06 kN.m, incluyendo el trabajo que se llevan los apoyos horizontales. Vs = 6,624 e06 kN.m.

apoyos están a mayor distancia y el traslado de carga hasta ellos aumenta (Figura 17). Si se obtiene  $w$ , para este último caso, dividiendo por la luz entre apoyos diagonalmente opuestos, sería equivalente a considerar la estructura inscrita en un círculo y tomar como luz la de éste, y por tanto su área.

De este modo el volumen estructural se reduce tomando valores equivalentes a las soluciones anteriores.

Se podría decir que la dimensión -luz- relevante es la del (menor) círculo que contiene a los apoyos, por lo tanto la del inscrito si el apoyo es en todo el contorno, y la del circuncrito si el apoyo es en los vértices.

Por lo tanto los diseños con menor apoyo tienen costos mayores. Cabría predecir que con base triangular y apoyo en los vértices aumentaría el coste. El sobre coste por menos apoyos puede asemejarse al área excedente del círculo respecto del coste de la base efectivamente cubierta.

### 7.1. Soluciones en forma de cúpula

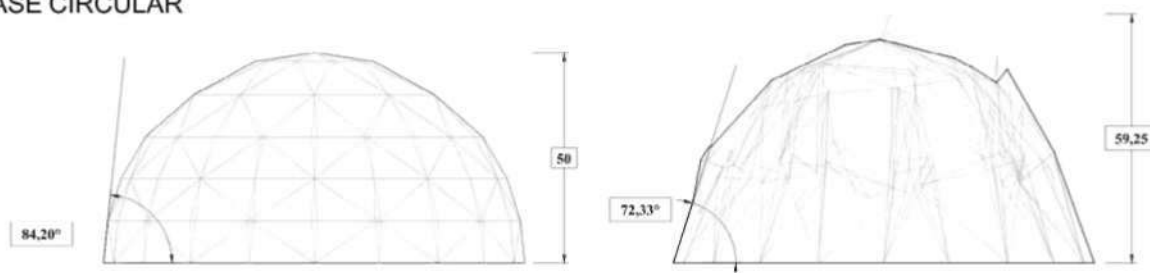
Las soluciones con limitación del recinto  $z = 0$  son cúpulas parabólicas, los empujes se resuelven en el anillo de la base. Gracias a esta forma no se necesitan anillos intermedios. Considerando la flexión global de colapso de la estructura inicial (semiesfera) con la solución (parabólica), se observa (Figura 18) la ventaja de las cúpulas parabólicas: a igual canto el brazo de palanca aumenta, aumentando la eficiencia estructural.

### 7.2. Concentración de tensiones y rugosidad de superficies

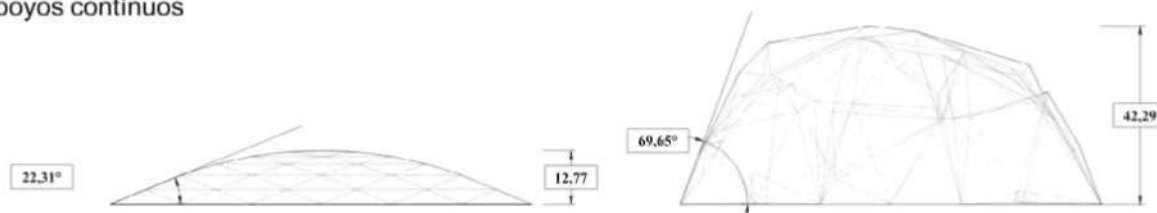
En todos los casos se observa la concentración de las solicitaciones en unos pocos elementos lo que jerarquiza la solución. Esto deriva del dimensionado discreto de los elementos, claramente se veía este aspecto al comparar la estructura de Isler contra la solución del SA. Por una parte contrasta con el comportamiento habitual de las láminas con distribución continua de tensiones y

17- Comparación de soluciones, alzado de la configuración inicial (izquierda) y de la solución encontrada (derecha).

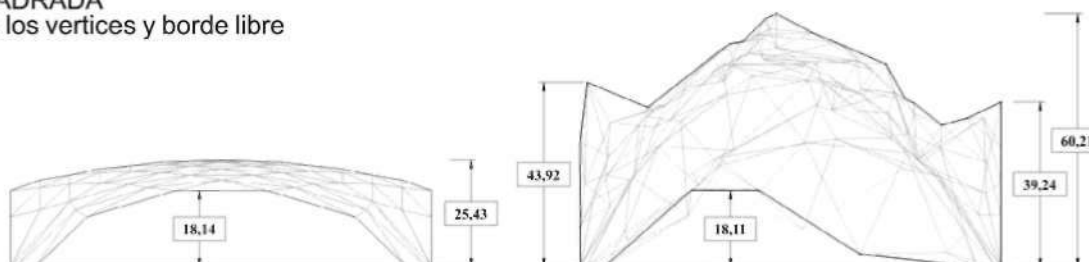
#### BASE CIRCULAR



#### BASE CUADRADA apoyos continuos



#### BASE CUADRADA apoyos en los vertices y borde libre



por otra destacar que la concentración de tensiones es también un fenómeno natural, un claro ejemplo aparece en las hojas de las plantas.

Otra característica geométrica es la rugosidad de la superficie. La cualidad fundamental no es la contribución de las plegaduras al canto total; inicialmente una mejora del ángulo de las piezas (arcos) que transportan la carga hacia el contorno (alrededor de  $70^\circ$ ), su número, su configuración y la manera en que se resuelve el anillo parecen las cualidades principales. Muchas de las soluciones conservan esas plegaduras debido a que ayudan a resistir las cargas locales con canto local.

### 7.3. Comportamiento del recocido simulado

El recocido simulado permite el estudio de la búsqueda de láminas óptimas. Ante un problema complejo, en el que es difícil obtener la estructura óptima, el algoritmo se ha comportado esencialmente bien, convergiendo y aportando soluciones aceptables cercanas al óptimo. Hay que programar las rutinas de manera que no se evite el problema en cuestión, en este caso limitando la longitud de las barras.

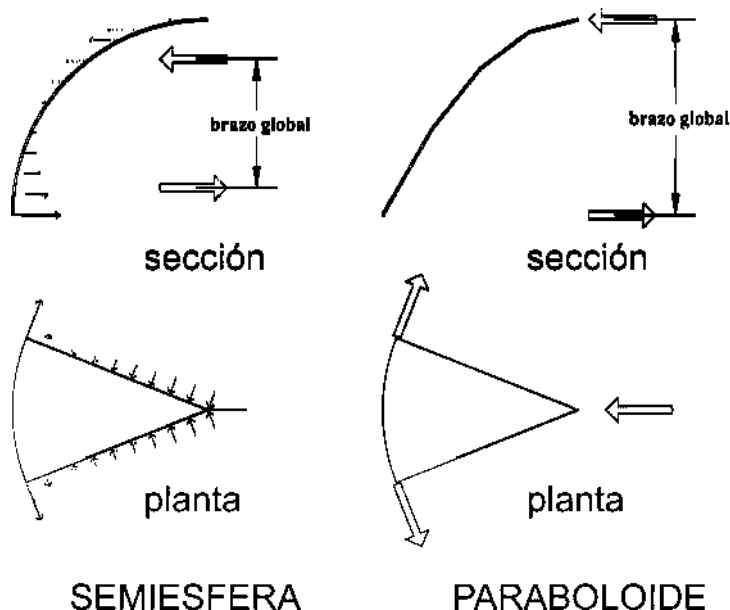
## 8. EXTRAPOLACIÓN DE RESULTADOS

Los parámetros encontrados son útiles en su aplicación directa a nuevos diseños de láminas. Si bien al principio del artículo se asimilaba la superficie de la lámina a un sistema reticulado de barras, al intentar hacer el proceso inverso con las soluciones se observa que el número finito de barras imposibilita soluciones continuas y facilita estas formas, complejas y con plegaduras.

Se trata de un problema que cruza tensiones normales de tracción y compresión, en el que además no se desprecian los esfuerzos de empuje de los anillos que cierran el equilibrio.

Los cruces óptimos, tracción-compresión se producen a  $90^\circ$ , según el corolario del teorema de Michell (7). El comportamiento general del modelo así es, aunque a pequeña escala, en ocasiones, confluyen numerosas barras en los nudos dificultando la lectura.

Cabría predecir que la solución continua sería parecida. Tampoco se ha considerado el pandeo de las barras comprimidas, en caso de introducirlo cabría pensar que las soluciones tenderían a barras comprimidas más cortas y, por lo tanto, a soluciones más



esbeltas pero con características generales parecidas.

18- Comparación a hundimiento de un sector de estructura.

18

## 9. CONCLUSIONES

En este artículo se ha expuesto un método para obtener formas óptimas de láminas reticuladas. Las soluciones aportadas representan al continuo de formas que existe detrás de cada una, este es el conjunto que se pretende explorar.

Se observa que el volumen estructural reducido parece describir el problema de manera acertada pues sirve para comparar soluciones con diferentes condiciones.

A partir de simplificaciones como el dimensionado estricto, la no consideración del pandeo, etc., se pueden capturar las propiedades de interés: patrones de comportamiento estructural y parámetros geométricos (luz relevante, ángulo de encuentro con los apoyos, formas paraboloideas, sobre coste por apoyos puntuales relacionado con la geometría de la base).

El procedimiento tiene mucho potencial, aplicándolo otras familias de soluciones se pueden seguir obteniendo conclusiones diferentes o se podría depurar incluyendo otras condiciones de diseño.

## AGRADECIMIENTOS

A Jaime Cervera Bravo y José Luis de Miguel Rodríguez por sus valiosas opiniones.

## BIBLIOGRAFÍA

- (1) Aarts, E. et Korst, J. "Simulated annealing and Boltzman machines: a stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing". Great Britain: Courier International, Tiotree, Essex, 1989.
- (2) Ansola, R.; Canales, J.; Tárrago, J. A.; Rasmussen, J. "An integrated approach for shape and topology optimisation of shell structures". Computers and Structures vol. 80 pp. 449-458, 2002.
- (3) Cervera, J. "Concebir y analizar estructuras", Madrid, 2004.
- (4) Cervera, J. "Diseño de estructuras de edificación", Madrid: Instituto Juan de Herrera & Departamento de Estructuras de Edificación, 1993.
- (5) Hasançebi, O.; Erbatur, F. "Layout optimisation of trusses using simulated annealing". Advances in Engineering, 2002, vol. 33, pp. 681-696
- (6) Kirkpatrick, S. Gellatt, C.D. et Vecchi, M. P. "Optimization by simulated annealing", Science, 220 pp. 671-680, 1983.
- (7) Michell, A. G. M. "The limits of Economy of Material in Frame-structures", Philosophical Magazine, S. 6 v. 8 nº 47 (1904)
- (8) Orta, B. "Parámetros de forma en laminas y su incidencia en la eficiencia estructural". Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 2005.
- (9) Press, et alii. Numerical Recipes in C, The art of Scientific Computing. USA, Massachusetts: Cambridge University Press, 2ª edición, 1992.
- (10) Ramm, E.; Bletzinger, K.-U. et Reiteringer, R. "Shape Optimization of Shell Structures", Bulletin of IASS, vol. 34, nº 112, pp. 103-121, 1993.
- (11) Ramm, E. et Schunck, E. Heinz Isler, Schalen: "Katalog zur Ausstellung". Stuttgart: Karl Krämer Verlag (1989)
- (12) Vázquez, M. "Un nuevo algoritmo para la optimización de estructuras: el recocido simulado" Informes de la Construcción, vol. 46 n. 436 (1995), pp. 49-69.
- (13) Yang, R.L. "Convergence of the Simulated Annealing Algorithm for Continuous Global Optimization" Journal of Optimization Theory and Applications 104 vol. 3 pp. 691-716, March 2000.